ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ:	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. / Β'ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	29 / 12 / 2025

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

(Μονάδες 7)

Α2. (α) Να γράψετε την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$.

(Μονάδες 2)

(β) Αν ε_1 και ε_2 είναι δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, τότε να γράψετε την σχέση που συνδέει τα λ_1 και λ_2 όταν:

(i) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

(ii) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

(Μονάδες 3 + 3 = 6)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(i) Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$.

(ii) Η ευθεία με εξίσωση Ax + By +Γ = 0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

(iii) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, όπου λ_1 ο συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$ και λ_2 ο συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\beta}$.

(iv) Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $y = y_0$.

(v) Η ευθεία με εξίσωση $x - y = 2026$ είναι παράλληλη στην διχοτόμο του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν :

$$\vec{\alpha}=(4,-3) \quad , \quad |\vec{\beta}|=2 \quad \text{και} \quad \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Β1. Να αποδείξετε ότι:

(i) $|\vec{\alpha}|=5$

(ii) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=5$

(iii) τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$ είναι μεταξύ τους κάθετα

(Μονάδες 4 + 5 + 4 = 13)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$.

Β2. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}|=\sqrt{19}$.

(Μονάδες 6)

Β3. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in R$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ να είναι κάθετα.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Γ(8 , 1) και επιπλέον:

- Η πλευρά ΑΒ βρίσκεται πάνω σε ευθεία με εξίσωση: $x-y=-3$
- Το ύψος ΑΚ βρίσκεται πάνω σε ευθεία με εξίσωση: $9x-y=21$

Γ1. Να δείξετε ότι Α(3 , 6).

(Μονάδες 5)

Γ2. Να βρείτε:

(i) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ

(ii) τις συντεταγμένες της κορυφής Β του τριγώνου

(Μονάδες 5 + 4 = 9)

Αν Β(–1 , 2) και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται πάνω σε ευθεία με εξίσωση: $x+9y=17$, τότε:

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 5)

Γ4. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

(**Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι εξισώσεις: $(\lambda^2-3\lambda+2)x+(1-\lambda)y-\lambda^2+\lambda=0$ (1) και

$x^2-y^2+2x+1=0$ (2).

Δ1. Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

(Μονάδες 6)

Για $\lambda \neq 1$:

Δ2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο Κ το οποίο και να βρείτε .

(Μονάδες 7)

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση (2) παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 οι οποίες τέμνονται κάθετα πάνω στον άξονα x'x.

(Μονάδες 7)

Δ4. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon_1: x-y=-1$ και τα σημεία $K(1\ ,\ -2)$, $\Lambda\left(\sqrt{2}|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\ ,-4\right)$ και $M(-1\ ,\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+1)$, όπου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Αν το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε_1 και το σημείο Κ είναι το μέσο του τμήματος ΟΛ , όπου Ο η αρχή των αξόνων, να βρείτε την γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με το $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 5)